



НЕЛІНІЙНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Другий (магістерський)</i>
Галузь знань	11 Математика та статистика
Спеціальність	111 Математика
Освітня програма	Страхова та фінансова математика
Статус дисципліни	Вибіркова
Форма навчання	Очна (денна)/дистанційна
Рік підготовки, семестр	5 курс, осінній (або весняний) семестр
Обсяг дисципліни	5 кредитів ЄКТС (150 годин), з них лекції 36 години, практичні заняття 36 годин, самостійна робота 78 годин
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Екзамен/модульна контрольна робота, розрахункова робота
Розклад занять	http://roz.kpi.ua , https://schedule.kpi.ua
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: докт. фіз.-мат. наук, професор Герасимчук Віктор Семенович Практичні: докт. фіз.-мат. наук, професор Герасимчук Віктор Семенович viktor.gera@gmail.com
Розміщення курсу	платформа дистанційного навчання Sikorsky Distance, електронний кампус КПІ esampus.kpi.ua , сайт кафедри, інформаційні ресурси бібліотеки, група в Telegram Підручник: <i>Герасимчук В.С., Ребенчук Т.В., Герасимчук І.В.</i> Метод оберненої задачі розсіяння та його застосування. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019 (2-е видання). – 110 с. Режим доступу https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46097

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

1.1. Опис навчальної дисципліни

Метою викладання дисципліни є дослідження конфігурацій та стійкості локалізованих (солітонних) розв'язків в теорії *нелінійних (еволюційних) хвильових рівнянь*. Існує два основних підходи. Перший, який бере свій початок з математичної теорії солітонів, стосується концепції інтегрованості та її застосування в різних моделях. Другий підхід пов'язаний із побудовою багатосолітонних розв'язків цих систем.

До першого класу відносяться нелінійні рівняння у частинних похідних, для яких може бути розв'язана задача Коші за початкової умови досить загального виду. Про такі рівняння кажуть як про точно розв'язувані нелінійні рівняння. Другий клас рівнянь умовно можна назвати класом рівнянь, що інтегруються частково. Задача Коші для них у загальному випадку не розв'язується. При пошуку точних розв'язків рівнянь зазначеного класу зазвичай використовуються автомодельні змінні або біжучі хвилі. Задача Коші для таких рівнянь може бути розв'язана лише для конкретної, як правило, заздалегідь невідомої початкової умови.

Загальна стратегія цієї дисципліни полягає в обговоренні та аналізі обох підходів на деяких базових модельних прикладах. Дана дисципліна є теоретичною основою сукупності знань та вмінь, що формують сучасний математичний апарат дослідника-природознавця. Набуті знання дозволять слухачам розв'язувати комплексні проблеми в галузі професійної та дослідницької діяльності.

Мета навчальної дисципліни – формування поглиблених уявлень про нелінійні математичні моделі та математичні методи сучасної нелінійної математичної фізики, а також про їх практичні додатки в сучасній науці та техніці.

Програмні компетентності:

Загальні компетентності (ЗК)

- ЗК 1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- ЗК 3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності.
- ЗК 7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.
- ЗК 8 Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел.
- ЗК 12 Здатність працювати автономно.
- ЗК 17 Здатність критично оцінювати результати своєї діяльності в професійній сфері, навчання і нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень в навчальних контекстах та/або професійній діяльності з урахуванням наукових, соціальних, етичних, правових, економічних аспектів.

Фахові компетентності (ФК)

- ФК 1 Здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.
- ФК 3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізнити основні ідеї від деталей і технічних викладок.
- ФК 4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізнити правдоподібні аргументи від формально бездоганих.
- ФК 5 Здатність до кількісного мислення.
- ФК 6 Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем.
- ФК 8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.
- ФК 14. Здатність демонструвати математичну грамотність, послідовно пояснити іншим математичні теорії або їх складові частини, взаємозв'язок та відмінність між ними, навести приклади застосувань у природничих науках.

1.2. Предмет вивчення дисципліни

Предмет навчальної дисципліни – математичні моделі процесів і явищ, обумовлені суто *нелінійністю*. За останні 30-40 років досягнуто значного прогресу в розумінні властивостей деяких нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, які виникають у вельми різних областях природознавства. Для цих рівнянь, найвизначнішим з яких є рівняння Кортевега-де Вріза, вдалося знайти загальні методи розв'язання. Головною особливістю розв'язків цих рівнянь є їх локалізований стан (усамітнена хвиля), тобто стабільні, недисипативні, локалізовані у просторі конфігурації, які поведуться як частинки (солітони).

Солітон характеризується такими властивостями: локалізований у скінченній області; поширюється без деформації, переносючи енергію, імпульс, момент імпульсу; зберігає свою структуру при взаємодії з іншими такими самими солітонами; може утворювати зв'язані стани, ансамблі. У системі з багатьох солітонів це призводить, зокрема, до появи складних стохастичних рухів (газ солітонів). Профіль (форма) солітону визначається в нелінійному середовищі двома конкуруючими процесами: розпливанням хвилі через дисперсію середовища та «перекиданням» наростаючого хвильового фронту через нелінійність.

Вивчення дисципліни «Нелінійні математичні моделі» покликане допомогти студентам другого рівня вищої освіти опанувати навички та знання, необхідні для виконання науково-дослідної роботи, магістерської роботи, а також бути конкурентоспроможними на сучасному ринку праці.

1.3. Результати навчання (РН)

- Після засвоєння навчальної дисципліни студенти мають демонструвати **програмні результати навчання**:
- РН 11 Вміти розв'язувати конкретні математичні задачі сформульовані у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення із застосуванням спеціальних функцій;
 - РН 12 Відшукувати потрібну науково-технічну інформацію у науковій літературі, базах даних та інших джерелах інформації.
 - РН 19 Знати теоретичні основи і застосовувати спеціальні функції для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ.

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни

Освітній компонент «Нелінійні математичні моделі» викладається у дев'ятому (або десятому) семестрі і є одним із ключових курсів професійної підготовки бакалаврів спеціальності «Математика». Цей курс дає систематизоване викладення основних нелінійних рівнянь, їх численних теоретичних та практичних застосувань.

Ця дисципліна має глибокі логічні зв'язки з попередніми дисциплінами навчального плану математичної підготовки бакалаврів.

Навчальна дисципліна «Нелінійні математичні моделі» спирається на апарат аналітичної геометрії, лінійної та векторної алгебри, математичного та функціонального аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, числових і функціональних рядів, ТФКЗ, перетворень Фур'є, методів математичної фізики та інших дисциплін бакалаврського рівня вищої освіти і забезпечує певні дисципліни магістерського рівня.

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Стаціонарні нелінійні хвилі

Тема 1.1. Нелінійні елементи та нелінійні характеристики.

Тема 1.2. Рівняння Кортевега-де Вріза.

Тема 1.3. Рівняння Кадомцева-Петвіашвілі.

Тема 1.4. Рівняння Буссінеска.

Тема 1.5. Нелінійне рівняння Шредінгера.

Тема 1.6. Рівняння \sin -Гордона.

Розділ 2. Нелінійні хвилі переносу

Тема 2.1. Рівняння Хопфа та Бюргерса.

Тема 2.2. Рівняння Курамото-Сівашинського.

Тема 2.3. Нелінійне рівняння теплопровідності.

Тема 2.4. Рівняння Колмогорова-Петровського-Піскунова.

Тема 2.5. Рівняння Бюргерса-Хакслі.

Тема 2.6. Рівняння Хенона-Хейлеса.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова література

1. Scott A. Nonlinear Science. Emergence and Dynamics of Coherent Structures. – Oxford University Press; 2nd edition, 2003. – 504 p.
2. Newell A.C. Solitons in mathematics and physics. – SIAM, Philadelphia, 1985. – 260 p.
3. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. Solitons and Nonlinear Wave Equations. – London-New York, Academic Press, 1982. – x+630 pp.
4. Takhtadjan L.A. and Faddeev L.D. Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons. Nauka, Moscow, 1986; English transl.: Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1987.
5. Manton N., Sutcliffe P. Topological solitons. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. – xii+493 pp.
6. Герасимчук В.С., Ребенчук Т.В., Герасимчук І.В. Метод оберненої задачі розсіяння та його застосування. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019 (2-е видання). – 110 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46097>

Допоміжна

7. Ablowitz M. J. and Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM, Philadelphia, 1981. – 438 p.
8. Захаров В.Е., Манаків С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
9. Lamb G.L. (Jr.). Elements of Soliton Theory. – John Wiley & Sons, New York, 1980. – 302 p.
10. Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. – К.: Наук. думка, 1989. – 304 с.
11. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. – М.: МИФИ, 2008. – 352 с.
12. Kivshar Yu.S., Agrawal G. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. – Academic Press, 2003. – 540 p.

Інформаційні ресурси

<https://www.youtube.com/watch?v=vbeEXUs5j7Y>

<http://physics.aps.org/articles/v6/15>

<http://ir.on.ufanet.ru/soliton/gallery.htm>

http://homepages.tversu.ru/~s000154/collision/main_rk.html

- [Solitons Home Page](#) (Heriot-Watt University, Edinburgh)
- [Soliton-Lab Art Gallery. Many Faces of Solitons](#) (Kyoto University)
- [Nonlinear Physics Group](#) (Australian National University)
- [Klaus Brauer's SOLITON Page](#) (University of Osnabrück)
- [Light Bullet Home Page](#) (Simon Fraser University)
- <http://theor.jinr.ru/~shnir/Solitons/345.html> (University off Olldenburg)
- [Harmonic maps and integrable systems \(ed. A.P. Fordy and J.C. Wood](#)

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Лекційні заняття

Розділ 1. Стаціонарні нелінійні хвилі

Тема 1.1. Нелінійні елементи та нелінійні характеристики

Лекція 1. Фундаментальні ефекти, до яких призводить нелінійність: неізохронність, ангармонічність, мультистабільність, автоколивання, динамічний хаос.

Тема 1.2. Рівняння Кортевега-де Вріза

Лекція 2-3. Поширення хвилі в нелінійному середовищі. Стаціонарні нелінійні хвилі. Рівняння Кортевега-де Вріза для опису хвиль на воді. Періодичні розв'язки

Тема 1.3. Рівняння Кадомцева-Петвіашвілі

Лекція 4. Стійкість усамітнених хвиль в слабо диспергуючих середовищах. Рівняння Кадомцева-Петвіашвілі.

Тема 1.4. Рівняння Буссінеска

Лекція 5-6. Стаціонарні ударні хвилі в середовищі з дисперсією та дисипацією. Рівняння Буссінеска.

Тема 1.5. Нелінійне рівняння Шредінгера

Лекція 7-8. Поширення хвильових пакетів. Нелінійне рівняння Шредінгера для обвідної хвильового пакета. Рівняння Гросса-Пітаєвського. Оптичне самофокусування. Трансверсальні явища.

Тема 1.6. Рівняння \sin -Гордона

Лекція 9-10. Осцилятор з нелінійністю синуса. Стаціонарні хвилі рівняння \sin -Гордона для опису дислокацій у твердому тілі. Періодичні хвилі. Нелінійні стоячі хвилі. Самоіндукована прозорість. Рівняння ϕ^4 .

Розділ 2. Нелінійні хвилі переносу

Тема 2.1. Рівняння Бюргерса

Лекція 11-12. Нелінійне рівняння переносу. Рівняння Хопфа та Бюргерса.

Тема 2.2. Рівняння Курамото-Сівашинського

Лекція 13. Рівняння Курамото-Сівашинського для опису хвильових процесів. Стійкі хвилі концентрації за наявності реакції та дифузії.

Тема 2.3. Нелінійне рівняння теплопровідності

Лекція 14-15. Узагальнення лінійного рівняння теплопровідності на випадок урахування залежності коефіцієнта теплопровідності від температури у вигляді степеневої функції. Процеси розповсюдження тепла при високих температурах. Задача Стефана про фазовий перехід.

Тема 2.4. Рівняння Колмогорова-Петровського-Піскунова

Лекція 16. Рівняння Колмогорова-Петровського-Піскунова (або Фішера). Процес поширення генної хвилі.

Тема 2.5. Рівняння Бюргерса-Хакслі

Лекція 17. Рівняння Бюргерса-Хакслі. Динаміка популяцій.

Тема 2.6. Рівняння Хенона-Хейлеса

Лекція 18. Модель Хенона-Хейлеса. Взаємодія трьох однакових мас, розташованих у вершинах рівностороннього трикутника.

Практичні заняття

Завдання циклу практичних занять: засвоєння основних закономірностей нелінійних хвильових явищ і процесів. Відпрацювання навичок самостійного розв'язування задач сучасної теорії коливань та хвиль.

Розділ 1. Стаціонарні нелінійні хвилі

Тема 1.1. Біжучі хвилі

Заняття 1-2. Загальні закономірності хвильових процесів. Кінетичні та енергетичні характеристики біжучої хвилі. Звукові хвилі, електромагнітні хвилі.

Тема 1.2. Хвилі на межі розділу двох середовищ

Заняття 3-4. Вплив граничних умов. Закономірності відбиття та проходження хвиль на межі розділу двох середовищ. Повне внутрішнє відбиття хвиль і його прояви у природі

Тема 1.3. Поляризація хвиль

Заняття 5-6. Основні стани поляризації електромагнітних хвиль.

Тема 1.4. Спектри: аналіз хвильових пакетів і сигналів

Заняття 7-8. Поширення та спектр гармонічного сигналу. Спектр періодичного сигналу та одиночного імпульсу.
Властивості спектрів Фур'є.

Заняття 9. МКР.

Розділ 2. Нелінійні хвилі переносу

Тема 2.1. Дисперсія хвиль

Заняття 10-11. Просторова та часова дисперсія. Гіперболічні та диспергуючі хвилі. Передача інформації.
Розповсюдження енергії в диспергуючій хвилі.

Тема 2.2. Інтерференція. Когерентність

Заняття 12-13. Кореляція зміни в часі і в просторі хвильових процесів. Інтерференція хвиль від двох джерел.
Багатопроменева інтерференція. Радіотелескопи.

Тема 2.3. Дифракція хвиль

Заняття 14-15. Поширення хвиль в розподілених коливальних системах і хвилеводах. Принцип Гюйгенса-Френеля.
Заняття 16. Дифракція Френеля та дифракція Фраунгофера. Дифракційна решітка.

Тема 2.4. Нелінійні коливання

Заняття 17-18. Особливості спектру нелінійних систем. Залежність періоду нелінійних коливань від амплітуди.

6. Самостійна робота студента

Самостійна робота студентів включає опрацювання лекційного матеріалу, підготовку до практичних занять, виконання домашніх завдань та індивідуального семестрового завдання. Індивідуальні завдання припускають комп'ютерне моделювання нелінійних математичних моделей.

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

7.1. Форми роботи

Навчальні заняття зазвичай проводяться у навчальних аудиторіях в off-line режимі; в умовах воєнного стану або карантину – в on-line режимі із застосуванням усіх доступних наочних засобів подання матеріалу (Zoom, Meet Google, Skype та інше). Додатково студенти отримують всі навчальні та методичні матеріали по e-mail, telegram-каналі або в електронному кампусі.

7.2. Правила відвідування занять

Заняття проводяться згідно з розкладом у навчальних аудиторіях; в умовах воєнного стану або карантину – в on-line режимі з використанням доступних засобів відео зв'язку за умови однозначної ідентифікації здобувача вищої освіти. Проведення занять в on-line режимі регламентується відповідним наказом по КПІ ім. Ігоря Сікорського.

За наявності поважних причин здобувач вищої освіти повинен завчасно (за 1 день) повідомити викладача про можливий пропуск контрольного заходу. Протягом наступного тижня здобувач вищої освіти має звернутися до викладача для погодження форми та порядку усунення заборгованості.

Якщо аудиторне заняття випадає на неробочий (святковий) день, то матеріал такого заняття частково переноситься в категорію «Самостійна робота студентів», а частково додається до наступного заняття.

7.3. Правила призначення заохочувальних та штрафних балів

Заохочувальні бали:

До 5 балів – за активну роботу щонайменше на 5-ти заняттях (обґрунтовані відповіді на запитання, самостійне розв'язування задач та їх аналіз, участь в обговореннях);

До 10 балів – студенту, який підготував і подав для у часті у студентській науковій конференції матеріал за тематикою навчальної дисципліни (за умови доповіді на конференції).

Штрафні бали:

Під час воєнного стану – не застосовуються.

8. Політика університету

8.1. Політика щодо академічної доброчесності

Безумовне дотримання положень «Кодексу честі КПІ ім. Ігоря Сікорського» (розділ 3).

Усі завдання мають виконуватися самостійно! Співпраця студентів дозволена лише при розв'язанні проблемних завдань, але свій розв'язок кожен студент захищає самостійно. Взаємодія студентів під час іспиту/

заліку категорично забороняється і будь-яка така діяльність вважається порушенням академічної доброчесності згідно принципів університету щодо академічної доброчесності. Політика та принципи академічної доброчесності, детальніше: <https://kpi.ua/code>

8.2. Норми етичної поведінки

Безумовне дотримання норм етичної поведінки, визначених у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»; детальніше: <https://kpi.ua/code>

Оцінювання та контрольні заходи

9. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

9.1. Види контролю

Вид контролю	Спосіб контролю
Поточний контроль	Перевірка виконання індивідуальних завдань, опитування за темою заняття, модульні контрольні роботи
Календарний контроль	Проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу
Семестровий контроль	Екзамен
Умови допуску до семестрового контролю	Семестровий рейтинг студента не менше 60 балів, за умови зарахування усіх індивідуальних завдань

9.2. Рейтингова система оцінювання результатів навчання

Головна частина рейтингу студента формується завдяки активній творчій праці на практичних заняттях, виконанні індивідуальних домашніх завдань та результатах модульної контрольної роботи.

Види контролю:

- поточний контроль: фронтальний (усний, письмовий);
- календарний контроль проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу.

1. Поточний контроль

Включає: експрес-опитування, опитування за темою заняття, написання МКР, захист індивідуальних завдань.

1. Робота на практичних заняттях

Ваговий бал – 2, якість роботи – 0 - 2 (відповідь: повна – 2, неповна –1, відсутня – 0, бездоганна – 4).

Максимальна кількість балів за роботу на практичних заняттях – не обмежена.

2. Модульна контрольна робота

Складається з 2-х частин і виконується перед календарним контролем (атестацією) за пройденим на момент її написання матеріалом. Кожна частина модульної контрольної оцінюється в 14 балів. Максимальна кількість балів за МКР – 28.

Переписування контрольної роботи з метою підвищення балу – не передбачене.

3. Індивідуальні домашні завдання

Ваговий бал – 8. Оцінюється кожне індивідуальне завдання у процентному відношенні до правильно розв'язаних задач. Максимальна кількість балів за 4 індивідуальні завдання складає: $4 \times 8 = 32$ бали.

Кожне індивідуальне завдання захищається особисто.

Загальний семестровий рейтинговий бал:

$$R = R_{ПЗ} + R_{МКР} + R_{ІДЗ} = R_{ПЗ} + 28 + 32,$$

де $R_{ПЗ}$ – максимальна кількість балів за роботу на практичних заняттях, $R_{МКР}$ – максимальна кількість балів за модульну контрольну роботу, $R_{ІДЗ}$ – максимальна кількість балів за індивідуальні завдання.

2. Календарний контроль

Здійснюється двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу

Критерій	Перший	Другий
Термін	8-й тиждень	14-й тиждень
Умови отримання позитивного результату	якщо поточний рейтинговий бал складає не менше 50% від максимально можливого балу на момент календарного контролю	якщо поточний рейтинговий бал складає не менше 50% від максимально можливого балу на момент календарного контролю

3. Семестровий контроль (екзамен)

Екзамен проводиться в усній формі. Екзаменаційні білети містять два теоретичні питання та два практичні завдання. Ваговий бал кожного завдання – 10.

Критерії оцінювання:

- повна відповідь на всі завдання (не менше 90% потрібної інформації) – 9 - 10 балів;
- достатньо повна відповідь (незначні неточності; не менше 75% потрібної інформації) – 7 - 8 балів;
- неповна відповідь (помилки і певні недоліки; не менше 60%) – 5 - 6 балів;
- незадовільна відповідь (неправильний метод розв'язування) – 0 – 4 бали.

Розмір стартової шкали $R_C = 60$ балів. Розмір екзаменаційної шкали $R_E = 40$ балів.

Розмір шкали рейтингу $R = R_C + R_E = 100$ балів.

Якщо на момент семестрового контролю, за умов виконання всіх умов допуску до семестрового контролю, здобувача вищої освіти не задовольняє набрана кількість балів за семестр, то результати рейтингової оцінки скасовуються і здобувач вищої освіти здає екзамен. У цьому разі екзамен може бути оцінений від 0 до 100 балів.

4 Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою

Кількість балів	Оцінка
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено професором кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь, доктором фіз.-мат. наук, професором Герасимчуком В.С.

Ухвалено кафедрою математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ (протокол № 11 від 22.06.2023 р.)

Погоджено Методичною комісією ФМФ (протокол № 10 від 27.06.2023 р.)